Διάλεξη 4η

NO:
DATE: 29-10-2019

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεώρημα: Έστω $A \subseteq X$ και $x \in X$. Τότε

i) $x \in A'$ αν-ν $\exists \{x_n\} \subseteq A$ διαφορετικών ανά 2 όρων τ.ω $x_n \to x$.

ii) $x \in \bar{A}$ αν-ν $\exists \{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x$

Απόδ

ii) ($\Longrightarrow$) $x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A \cup A'$. Αν $x \in A'$ τέλος από το (i)
Αν $x \notin A' \Rightarrow x \in A$. Παίρνουμε ότι $x_n = x$.

($\Longleftarrow$) Από υπόθεση υπάρχει $\{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x$.

Περίπτωση I: $\exists \{x_{k_n}\}$ υποακολουθία διαφορετικών ανά 2 όρων της $\{x_n\}$ $\Rightarrow x_{k_n} \to x \overset{(i)}{\Rightarrow} x \in A' \subseteq \bar{A}$

Περίπτωση II: $\nexists \{x_{k_n}\}$ υποακολουθία διαφορετικών ανά 2 όρων της $\{x_n\}$ $\Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πεπερασμένο $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0 : x_n = x \Rightarrow x \in A \subseteq \bar{A}$.

Πόρισμα: Ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι κλειστό αν-ν $\forall \{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x \in X$ ισχύει το $x \in A$.

Απόδ

A κλειστό αν-ν $A = \bar{A}$ (+ ii)

Ορισμός: Έστω $A \subseteq X$. Το A θα λέγεται πυκνό αν $\bar{A} = X$.
$B \subset X$. Θα λέμε ότι το A είναι πυκνό στο B αν $\bar{A} = B$.
Θα λέμε ότι το A δεν είναι (πουθενά) πυκνό στο B, αν $\bar{A} \cap B = \emptyset$.
Θα λέμε ότι το A δεν είναι (πουθενά) πυκνό στο X αν $\bar{A} = \emptyset$.

Ορισμός: Το $x\in X$ καλείται συνοριακό σημείο του A, αν $\forall r>0$: $B(x,r)\cap A,\ B(x,r)\cap A^c\neq\emptyset$.
x συνοριακό σημείο αν-ν $x\in\bar{A}\cap\overline{A^c}$.

• ∂A = σύνορο του A = σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του $\bar{A}\cap\overline{A^c}$.

Ορισμός: Έστω (X,d), (Y,ρ) μ.χ. $f:X\to Y$.
Η f ονομάζεται συνεχής στο $x_0\in X$, αν:
$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ τ.ω $\forall x\in X$ με $d(x,x_0)<\delta$, $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.
Η f θα λέγεται συνεχής στο x_0, $\forall x_0\in X$.

Θεώρημα: (Τ.Α.Ε.1)
i) f συνεχής
ii) $\forall O\subseteq Y$, O: ανοιχτό, $f^{-1}(O)$ ανοιχτό
iii) $\forall\{x_n\}\subseteq X$ τ.ω $x_n\to x\in X$, ισχύει $f(x_n)\to f(x)$
iv) $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$, $\forall A\subseteq X$.
v) $\forall C\subseteq Y$, C κλειστό, $f(C)$ κλειστό.

Απόδ.
(i)$\Rightarrow$(ii) Έστω $O\subseteq Y$, O ανοιχτό. Έστω $x_0\in f^{-1}(O)$.
Έστω $\varepsilon>0$.
• f συνεχής $\Rightarrow\exists\delta>0$ τ.ω $\forall x\in X$ με $d(x,x_0)<\delta$, $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.
• O ανοιχτό $\Rightarrow\exists\varepsilon>0$ τ.ω $B(f(x_0),\varepsilon)\subseteq O$

$$\Updownarrow$$

$(\forall y\in Y$ με $\rho(f(x_0),y)<\varepsilon$, $y\in O)$
$\Rightarrow\forall x\in X$ με $d(x,x_0)<\delta$, $f(x)\in O$
$\Rightarrow\forall x\in B(x_0,\delta)$, $f(x)\in O$: $(f(x)\in O\Rightarrow x\in f^{-1}(O))$
$\Rightarrow B(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(O)\Rightarrow f^{-1}(O)$: ανοιχτό

(ii) ⇒ (iii) Έστω $\{x_n\} \subseteq X$, $x_n \to x \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$
$B(f(x),\varepsilon)$: ανοιχτό ⇒ $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ ανοιχτό
⇒ $\exists \delta > 0$ τ.ω $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$
⇒ $x \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ ανοιχτό
⇒ $\forall a \in B(x,\delta)$ το $f(a) \in B(f(x),\varepsilon)$ ⇒
$\forall a \in X$ τ.ω $d(x,a) < \delta$, $\rho(f(x),f(a)) < \varepsilon$
Όμως $x_n \to x$ ⇒ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$:
$d(x_n,x) < \delta$ ⇒ $\forall n \geq n_0$, $\rho(f(x),f(a)) < \varepsilon$
⇒ $f(x_n) \to f(x)$.

(iii) ⇒ (iv) Έστω $A \subseteq X$, $x \in \bar{A}$ ⇒
$\exists \{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x \overset{(iii)}{\Rightarrow} f(x_n) \to f(x)$

$\{f(x_n)\} \subseteq f(A) \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$. Έστω $y \in f(\bar{A})$
⇒ $\exists x \in \bar{A}$, $y = f(x)$ ⇒ $y = f(x) \in \overline{f(A)}$ ⇒ $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(iv) ⇒ (v) Έστω $C \subseteq Y$, C κλειστό.
$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \bar{C}$ ⇒

$\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(\bar{C}) = f^{-1}(C)$ ⇒ $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$
⇒ $f^{-1}(C)$: κλειστό.

(v) ⇒ (i) Έστω $x_0 \in X$, έστω $\varepsilon > 0$.
Θέτουμε $C = (B(f(x_0),\varepsilon))^c$. Γνωρίζουμε ότι

$f^{-1}(C)$: κλειστό ⇒ $(f^{-1}(C))^c$: ανοιχτό ⇒

$(x_0 \in f^{-1}(C^c))$: $\exists \delta > 0$ τ.ω $B(x_0,\delta) \subseteq (f^{-1}(C))^c$
⇒ $\forall x \in X$ τ.ω $d(x,x_0) < \delta$
$x \notin f^{-1}(C)$ ⇒ $f(x) \notin C$ ⇒ $\rho(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq X$ ((X,d) μ.χ.)
Διάμετρος του $A = d(A)$ καλείται το σύνολο $d(A) = \sup\{d(x,y),\ x \in A,\ y \in A\}$.
Το A λέγεται φραγμένο αν $d(A) < \infty$
Ο X λέγεται φραγμένος μ.χ. αν $d(X) < \infty$.

Ορισμός: Έστω d, ρ 2 μετρικές στο X. Οι d, ρ θα λέγονται ισοδύναμες αν
$d(x_n, x) \to 0 \iff \rho(x_n, x) \to 0$, $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x \in X$.

Πρόταση: Έστω $d: X \times X \to \mathbb{R}$ μετρική. Τότε
$\rho: X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$

είναι μετρική ισοδύναμη με την d.

Κάθε μετρικός χώρος μπορεί να γίνει φραγμένος.

$$\rho(x,y) = 1 - \frac{1}{1 + d(x,y)}. \quad \text{Γ.ι.ο } x,y,z \in X$$

Έχω: $\rho(y,z) = 1 - \dfrac{1}{1 - d(y,z)} \leq 1 - \dfrac{1}{1 - d(x,y) + d(y,z)}$

και $\rho(x,z) - \rho(y,z) = \dfrac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} - \dfrac{d(y,z)}{1 + d(y,z)}$

$$= \frac{d(x,z) - d(y,z)}{(1 + d(x,z))(1 + d(y,z))} \leq \frac{d(x,y)}{1 + d(x,z) + d(y,z)}$$

$$\leq \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Ορισμός: $\{x_n\} \subseteq X$, η x_n λέγεται Cauchy αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $\forall m, n \geq n_0$: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Πρόταση: Αν $\{x_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\{x_n\}$: Cauchy.

Απόδ

Έστω $(\varepsilon > 0)$, $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$ $(x_n \to x) \Rightarrow$

$\exists n_0 \Rightarrow \forall n, m \geq n_0$: $d(x_n, x_m) < d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

π.χ: $X = (0, +\infty)$, $d(x, y) = |x - y|$

$x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \{x_n\}$ Cauchy: αλλά x_n ΔΕΝ συγκλίνει στον X.

Ορισμός: Αν όλες οι ακολουθίες Cauchy από τον μ.χ. (X, d) συγκλίνουν, ο (X, d) λέγεται πλήρης.

Θεώρημα: Έστω (X, d) μ.χ. πλήρης. $A \subseteq X$. Το A κλειστό αν-ν (A, d) πλήρης μ.χ.

Απόδ

$(\Rightarrow)$ Έστω $\{x_n\} \subseteq A$, $\{x_n\}$: Cauchy $\xRightarrow[(X,d)]{\text{πλήρης}}$

$\{x_n\}$ συγκλίνει $\xRightarrow{A \text{ κλειστό}}$ $\lim x_n \in A \Rightarrow (A, d)$ πλήρης

($\Leftarrow$) Έστω $\{x_n\} \subseteq A$ συγκλίνουσα $\Rightarrow$
$\{x_n\}$ Cauchy $\xrightarrow[\text{πλήρης}]{(A,d)}$ $\lim(x_n) \in A \Rightarrow A$: κλειστό

Θεώρημα (Κιβωτισμού του Cantor):
Έστω (X,d) πλήρης μ.χ. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με:
i) $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
ii) $d(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μονοσύνολο.

Απόδ.

α) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο. Έστω $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x, y \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$d(x,y) \leq d(A_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\overset{d(A_n)\to 0}{\Rightarrow}$ $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

β) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Έστω $(x_n) \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Θ.δ.ο. $\{x_n\}$ Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $d(A_n) < \varepsilon/2$, $\forall n \geq n_0$.
Έστω $n, m \geq n_0$. Τότε $d(x_m, x_n) \leq$
$d(x_m, y_{n_0}) + d(x_n, y_{n_0}) \overset{x_m, x_n \in A_{n_0}}{\leq} d(A_{n_0}) + d(A_{n_0})$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\xRightarrow{(X,d)\ \text{πλήρης}}$ $\exists x \in X$ τ.ω. $x_n \to x$.
$(x_n) \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$, τότε $\forall n \geq k$
$x_n \in A_n \subseteq A_k$ $\Rightarrow x \in A_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Ορισμός: Ο (X,d) λέγεται συμπαγής όταν κάθε ανοιχτή κάλυψη του X ανάγεται σε πεπερασμένη

• Έστω $A \subseteq X$, $\{A_i\}_{i \in I}$ $(A_i \subseteq X,\ i \in I)$ αποτελεί κάλυψη του A, αν $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

"ανάγεται σε πεπερασμένη" σημαίνει $\exists\ i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ τ.ω $A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} = X$

Θεώρημα: Το A είναι συμπαγές αν-ν $\forall \{x_n\} \subseteq A$, $\exists \{x_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$ που συγκλίνει στο A.

Θεώρημα: A συμπαγές $\Longrightarrow$ A κλειστό κ' φραγμένο
$(\not\Longleftarrow)$ δεν ισχύει πάντα.

Θ. (Heine-Borel): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές αν-ν A κλειστό κ' φραγμένο.